

УДК 517.54

## О СВЯЗИ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ ПОНЯТИЯМИ И ФОРМУЛАМИ ТЕОРИЙ ВЕКУА И БЕРСА

М.А. ТАГИЕВА

*Бакинский Государственный Университет*

*mtağiyeva@mail.ru*

*В работе дана связь между некоторыми понятиями и формулами теорий обобщённых аналитических функций Векуа и псевдоаналитических функций Берса, которая даст возможность расширить рамки применения этих теорий.*

**Ключевые слова:** обобщённые аналитические функции, псевдоаналитические функции,  $(F, G)$  - производные, обобщённые полиномы, формальные степени.

Теория обобщённых аналитических функций (о.а.ф.), (терминология Векуа) или псевдоаналитических функций (п.а.ф.) (терминология Берса) получила широкое развитие благодаря проникновению её в общую теорию эллиптических уравнений и богата связями со многими разделами анализа, геометрии и механики.

Основополагающие результаты её были сформулированы в монографиях Векуа [1] и Берса [2].

Векуа исходил из эллиптической системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + au + bv = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + cu + dv = 0 \end{cases} \quad (1)$$

или в комплексной записи

$$\partial_{\bar{z}} w + Aw + B\bar{w} = 0, \quad (2)$$

обобщающей систему Коши-Римана, и, пользуясь рядом соотношений и формул, связывающих семейство решений рассматриваемой системы дифференциальных уравнений с классом голоморфных функций комплексного переменного, выяснил структуру решений системы (2), устано-

вив глубокую связь между классом решений уравнения (2) и классом голоморфных функций. Это позволило редуцировать исследования к классической теории голоморфных функций.

Берс же в своей теории исходил из порождающей пары  $(F, G)$ , представляющей собой пару Гельдерова – непрерывных функций, подчинённых условию  $\text{Im}(\bar{F} \cdot G) > 0$ . С помощью неё, обобщая классическое понятие дифференцируемости и интегрируемости по комплексному переменному, автор построил теорию псевдоаналитических функций, обобщающую теорию голоморфных функций, и доказал её применение в теории уравнений с частными производными эллиптического типа.

Центральным результатом в обеих теориях является так называемый «принцип подобия», позволивший получить ряд аналогов свойств голоморфных функций.

Однако, как уже отмечалось выше, ввиду разных подходов к изучению свойств решений уравнения (2), в этих теориях своя терминология и связанные с ней обозначения и формулы. Ниже мы установим связь между ними.

Далее рассматривается класс  $U_{p,2}(A, B, G)$ ,  $p > 2$ , решений уравнения (2) с коэффициентами  $A, B \in L_{p,2}(\mathbf{C})$ ,  $p > 2$ ;  $G$  - конечная область на комплексной плоскости [1].

Пусть  $w(z)$  ограничена и принадлежит классу  $U_{p,2}(A, B, \mathbf{C})$ ,  $p > 2$ . Тогда она удовлетворяет интегральному уравнению [1]

$$w(z) - \frac{1}{\pi} \iint_C \frac{A(\zeta)w(\zeta) + B(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{\zeta - z} d\xi d\eta \equiv w - Pw = c_0 + ic_1,$$

где  $c_0, c_1$  - вещественные постоянные.

Следовательно,

$$w(z) = c_0 F(z) + c_1 G(z), \quad (3)$$

где  $F(z)$  и  $G(z)$  - решения уравнений

$$F(z) - PF(z) = 1, \quad G(z) - PG(z) = i. \quad (4)$$

Они имеют вид

$$F(z) = e^{\omega_0(z)}, \quad G(z) = ie^{\omega_0(z)},$$

где

$$\omega_j(z) = \iint_C \frac{g_j(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad (j = 0, 1). \quad [1].$$

$$g_j(z) = \frac{1}{\pi} \left( A(z) + B(z) \frac{\overline{\omega_j(z)}}{\omega_j(z)} \right) \quad (j = 0, 1).$$

Таким образом,  $F(z)$  и  $G(z)$  всюду отличны от нуля в  $\overline{\mathbf{C}}$ , причём  $F(\infty) = 1$ ,  $G(\infty) = i$ .

Функция (3) может обратиться в нуль в какой-нибудь фиксированной точке плоскости тогда и только тогда, когда  $c_0 = c_1 = 0$ . Отсюда следует, что  $F(z)$  и  $G(z)$  удовлетворяют всюду на плоскости условию

$$\operatorname{Im}(\overline{F}(z) \cdot G(z)) \geq k_0 > 0. \quad (5)$$

Так как

$$\partial_{\bar{z}} F(z) + A(z)F(z) + B(z)\overline{F}(z) = 0,$$

$$\partial_{\bar{z}} G(z) + A(z)G(z) + B(z)\overline{G}(z) = 0,$$

то имеем

$$A = -\frac{\overline{F}G_{\bar{z}} - \overline{F_z}G}{FG - \overline{FG}}, \quad B = \frac{FG_{\bar{z}} - F_z G}{FG - \overline{FG}}. \quad (6)$$

Таким образом, между парами  $(A, B)$  и  $(F, G)$  имеется взаимно однозначное соответствие. Если заданы  $A$  и  $B$ , принадлежащие  $L_{p,2}(\mathbf{C})$ , то можно определить  $F$  и  $G$  однозначно, решая интегральные уравнения (4), причём  $F, G \in C_{\frac{p-2}{p}}(\mathbf{C})$ ,  $p > 2$ , и допускают обобщённые производные по  $\bar{z}$ , принадлежащие  $L_{p,2}(\mathbf{C})$ . Кроме того, на всей плоскости выполняется условие (5).

Пусть теперь задана пара функций  $(F, G)$ , удовлетворяющая условиям:

- 1)  $F, G \in C_{\frac{p-2}{p}}(\mathbf{C})$ ,  $p > 2$ ,
- 2)  $F$  и  $G$  имеют обобщённые производные по  $\bar{z}$  в смысле Соболева, причём  $\partial_{\bar{z}} F, \partial_{\bar{z}} G \in L_{p,2}(\mathbf{C})$ ,  $p > 2$ ;
- 3) на всей плоскости выполняется условие (5).

В таком случае по формулам (6) однозначно определяется соответствующая пара  $A, B$  коэффициентов уравнения (2).

Согласно терминологии Берса, пара  $(F, G)$  называется порождающей парой. Она была положена в основу построения теории псевдоаналитических функций.

По паре  $(F, G)$  определяется  $(F, G)$ -производная следующим образом.

Из условия (5) следует, что для любой точки  $z_0 \in G$  существуют такие вещественные функции  $\varphi$  и  $\psi$ , что

$$w(z_0) = \varphi(z_0)F(z_0) + \psi(z_0)G(z_0).$$

Функция  $w(z)$  имеет в точке  $z_0$   $(F, G)$ - производную  $\dot{w}(z_0)$ , если существует предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\dot{w}(z) - \varphi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z)}{z - z_0} = \dot{w}(z_0) \equiv \dot{w}_{(F,G)}(z_0). \quad (7)$$

Для существования  $\dot{w}(z_0)$  необходимо и достаточно, чтобы в точке  $z_0$  имело место равенство

$$w_{\bar{z}}(z_0) + A(z_0)w(z_0) + B(z_0)\overline{w(z_0)} = 0,$$

где  $A$  и  $B$  - функции вида (6).

Функция  $w(z)$  называется п.а.ф. в области  $G$ , если она непрерывна и имеет почти везде в этой области  $(F, G)$ - производную вида (7).

Таким образом, класс п.а.ф., соответствующий паре  $(F, G)$ , совпадает с о.а.ф. класса  $U_{p,2}(A, B, C)$ . Ниже о.а.ф.  $w(z)$  класса  $U_{p,2}(A, B, G)$  является и псевдоаналитической функцией относительно порождающей пары  $(F, G)$ .

Введение  $(F, G)$  - производной позволило Берсу развить дифференциальное исчисление для  $(F, G)$  - п.а.ф. . Оказалось, что  $(F, G)$ - производная  $\dot{w}(z)$  также является п.а.ф., но относительно другой порождающей пары  $(F_1, G_1)$ , называемой последующей для пары  $(F, G)$  так, что п.а.ф.  $w(z)$  является бесконечно дифференцируемой относительно последовательности  $\{(F_\nu, G_\nu)\}$  порождающих пар, где каждая  $(F_{\nu+1}, G_{\nu+1})$  - последующая для  $(F_\nu, G_\nu)$ .

Введено понятие  $(F, G)$  - интеграла, как операции, обратной к  $(F, G)$  - дифференцированию. Так как между парами  $(A, B)$  и  $(F, G)$  установлено взаимно однозначное соответствие, то  $\dot{w}(z)$  можно рассматривать как о.а.ф., удовлетворяющую уравнению вида (2), но с другими коэффициентами  $(A_1, B_1)$ , определяемыми парой  $(F_1, G_1)$ .

Перейдём к сопоставлению некоторых результатов этих теорий.

В теории Векуа для о.а.ф.  $w(z)$  получена обобщённая формула Коши, которая является аналогом интегральной формулы Коши для голоморфных функций, и в случае, когда  $A = B = 0$  совпадает с ней. Она имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) w(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{w(\zeta)} d\bar{\zeta} = \begin{cases} w(z), z \in G, \\ \frac{\alpha}{2} w(z), 0 < \alpha \leq 2, z \in \Gamma, \\ 0, z \in \bar{G}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\Omega_1(z, \zeta)$  и  $\Omega_2(z, \zeta)$  - главные ядра класса  $\mathbf{U}_{p,2}(A, B, G)$ ,  $p > 2$ , определяемые формулами

$$\Omega_1(z, t) = X_1(z, t) + iX_2(z, t), \quad (9)$$

$$\Omega_2(z, t) = X_1(z, t) - iX_2(z, t),$$

а  $X_1(z, t)$  и  $X_2(z, t)$  - решения уравнения (2), соответствующие функциям  $\Phi_1(z) = \frac{1}{2(t-z)}$  и  $\Phi_2(z) = \frac{1}{2i(t-z)}$ ,  $t$  - некоторая фиксированная точка плоскости.

Эти решения в теории Берса обозначены  $Z^{-1}\left(-\frac{1}{2}, t; z\right)$  и  $Z^{-1}\left(-\frac{1}{2i}, t; z\right)$

соответственно, и называются формальными степенями.

Тогда (9) можно переписать следующим образом

$$\Omega_1(z, t) = Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2}, t; z\right) + iZ^{(-1)}\left(-\frac{1}{2i}, t; z\right), \quad (10)$$

$$\Omega_2(z, t) = Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2}, t; z\right) - iZ^{(-1)}\left(-\frac{1}{2i}, t; z\right). \quad (11)$$

Теперь нетрудно привести формулу Коши (8) к формуле Коши теории Берса. Подставляя выражения (10) и (11) в (8) и учитывая свойства формальных степеней [2], после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2}, t; z\right) + iZ^{(-1)}\left(-\frac{1}{2i}, t; z\right) \right) w(t) dt - \\ &- \left( Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2}, t; z\right) - iZ^{(-1)}\left(-\frac{1}{2i}, t; z\right) \right) \overline{w(t)} d\bar{t} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Z^{(-1)}(i(\operatorname{Re} w(t)dt) - \operatorname{Im}(w(t)dt), t; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Z^{(-1)}(iw(t)dt, t; z) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Z^{(-1)}(i \operatorname{Re}(w(t)dt) - \operatorname{Im}(w(t)dt), t; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Z^{(-1)}(iw(t)dt, t; z), \quad (12) \end{aligned}$$

что совпадает с интегральной формулой Коши для псевдоаналитических функций [2].

Если  $A = B = 0$  вне  $\overline{G}$ , то главные ядра (8) класса  $\mathbf{U}_{p,2}(A, B, \mathbf{C})$ ,  $p > 2$ , называются нормированными ядрами относительно области  $G$  и обозначаются  $\Omega_1(z, t, G)$  и  $\Omega_2(z, t, G)$ . При  $t \in G$  они голоморфны относительно  $z$  вне  $\overline{G}$  и обращаются в ноль на бесконечности.

С помощью этих ядер для о.а.ф.  $\mathbf{U}_{p,2}(A, B, G)$ ,  $p > 2$ , и непрерывных в  $\overline{G}$  получено представление

$$w(z) \equiv K(f, G) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, t, G) f(t) dt - \Omega_2(z, t, G) \overline{f(t)} d\bar{t}, \quad (13)$$

где

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t) dt}{t - z}, \quad z \in G.$$

Функция  $f(z)$  голоморфна в  $G$  и непрерывна в  $\overline{G}$  [1].

Оператор  $K(f, G)$ , определённый формулой (13), сопоставляет каждой голоморфной в области  $G$  и непрерывной в  $\overline{G}$  функции  $f(z)$  определённую о.а.ф.  $w(z) \in U_{p,2}(A, B, G)$ ,  $p > 2$ , непрерывную в  $\overline{G}$  [1]. О.а.ф., соответствующие функциям  $f(z) = (z - z_0)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , обозначаются

$$w_{2n}(z, z_0) \equiv K((z - z_0)^n, G), \quad (14)$$

$$w_{2n+1}(z, z_0) \equiv K(i(z - z_0)^n, G).$$

Они являются обобщёнными полиномами степени  $\left[ \frac{n}{2} \right]$ .

Покажем, что

$$w_{2n} = Z^{(n)}(1, z_0; z), \quad (15)$$

$$w_{2n+1} = Z^{(n)}(i, z_0; z), \quad (16)$$

где  $Z^{(n)}(\alpha, z_0; z)$  - формальные степени, введённые Берсом [2].

Проверим, например, справедливость (15). Из (12) следует, что формулу (13) для функции  $f(z) = (z - z_0)^n$  можно записать в виде

$$w_{2n}(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Z^{(-1)}(i(t - t_0)^n dt, t; z), \quad z \in G.$$

Докажем, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Z^{(-1)}(i(t - z_0)^n dt, t; z) = Z^{(n)}(1, z_0; z), \quad z \in G.$$

Рассмотрим функцию

$$w(z) = \begin{cases} Z^{(n)}(1, z_0; z), & z \in G, \\ \frac{\alpha}{2} Z^{(n)}(1, z_0; z), & z \in \partial G, \\ 0, & z \in \overline{G}. \end{cases}$$

Функция  $W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Z^{(n)}(1; z_0; t)}{t-z} dt$  непрерывна в  $\mathbf{C}$ , т.к.  $Z^{(n)}(1; z_0; t)$  -

Гельдерово-непрерывна. Далее

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Z^{(n)}(1; z_0; t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(t-z_0)^n}{t-z} dt$$

также непрерывна в  $\mathbf{C}$ , как и функция

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a(t-z_0)^n}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Z^{(-1)}(i(t-z_0)^n dt, t; z).$$

Поэтому функция

$$W_1(z) = w(z) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Z^{(-1)}(i(t-z_0)^n dt, t; z)$$

непрерывна в  $\mathbf{C}$ . Кроме того,  $W_1(z)$  п.а.ф. внутри и вне  $\Gamma$ , тогда по теорема об устранении особенностей  $W_1(z)$  п.а.ф. всюду в  $\mathbf{C}$  и  $W_1(z) \rightarrow 0$ ,  $z \rightarrow \infty$ . По теореме Лиувилля для п.а.ф  $W_1(z) \equiv 0$  и значит

$$w_{2n}(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Z^{(-1)}(i(t-z_0)^n dt, t, z) = \begin{cases} Z^{(n)}(1, z_0; z), & z \in G, \\ \frac{\alpha}{2} Z^{(n)}(1, z_0; z), & z \in \partial G, \\ 0, & z \in \overline{G}. \end{cases}$$

Если  $G = \{|z-z_0| < \rho\}$ ,  $\Gamma = \{|z-z_0| = \rho\}$ , то о.а.ф.  $w(z)$  разлагается в ряд

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(z, z_0, \rho), \quad (17)$$

где

$$c_{2k} + ic_{2k+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

который сходится равномерно внутри  $G$  [1].

Через формальные степени это разложение имеет вид

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Z^{(k)}(a_k, z_0; z), \quad (19)$$

где  $a_k = c_{2k} + ic_{2k+1}$ .

С помощью оператора  $K(f, G)$  в работах [3], [4] построены обобщённые полиномы Фабера  $\Phi_k(z, G)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , являющиеся аналогами классических полиномов Фабера для односвязной области  $G$ , и получены обобщения разложения (17) на случай конечной односвязной области.

Аналогичные результаты могут быть сформулированы в терминах теории Берса.

В дальнейшем мы используем установленные связи в теории аппроксимации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988, 512 с.
2. Bers L. Theory of pseudoanalytic functions. New York University, New York, 1952, p.450.
3. Тагиева М.А. О сходимости рядов по обобщённым полиномам Фабера // Вестник БГУ, сер.физ.-мат.наук, 2008, №3, с.34-37.
4. Тагиева М.А. О разложении обобщённых аналитических функций в ряд по обобщённым полиномам Фабера в замкнутой области // Вестник БГУ, сер.физ.-мат.наук, 2011, №4, с.55-60.

#### VEKUA VƏ BERS NƏZƏRİYYƏLƏRİNİN BƏZİ ANLAYIŞ VƏ FORMULALARI ARASINDAKI ƏLAQƏ HAQQINDA

M.Ə.TAĞIYEVƏ

#### XÜLASƏ

İşdə ümumiləşmiş analitik funksiyaların Vekua nəzəriyyəsi ilə psevdoanalitik funksiyaların Bers nəzəriyyəsinin müxtəlif anlayışları və formulaları arasındakı əlaqə verilmişdir.

**Açar sözlər:** ümumiləşmiş analitik funksiyalar, psevdoanalitik funksiyalar,  $(F, G)$  - törəmələri, ümumiləşmiş çoxhədlilər, formal qüvvətlər.

#### ON THE CONNECTION BETWEEN SOME CONCEPTS AND FORMULAS OF VECUA'S AND BERS' THEORIES

M.A.TAGIYEVA

#### SUMMARY

The connection between some concepts and formulas of Vecua's and Bers' theories is given.

**Key words:** pseudoanalytic functions, generalized analytic functions,  $(F, G)$  - derivatives, generalized polynomials, formal powers.

*Поступило в редакцию: 18.09.2013 г.*

*Подписано к печати: 17.10.2013 г.*